

### Logische functies

- **Binaire elementen** → slechts twee mogelijkheden
  - voorbeeld : “het regent”
  - slechts twee toestanden : *waar* of *niet waar*
- **Voorstellen met LETTERSYMBOOL**
  - A = “het regent”
  - overeenkomst :
    - » als “het regent” WAAR is → A=1
    - » als “het regent” NIET WAAR is → A=0

A	"het regent"
0	is niet waar
1	is waar

- **Venn diagram**

Booleaanse algebra
DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### Negatie

- **Negatie** → het *tegengestelde* van een logische situatie
- **Voorstelling:** met negatie-streepje boven variabele  $\bar{A}$
- **Zeg:** A-niet, niet-A, A-invers  
A-not, not-A
- **Als A waar is, dan is  $\bar{A}$  niet waar**

A	toestand	$\bar{A}$
0	het regent niet	1
1	het regent	0

A="het regent"

Booleaanse algebra
DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### NOT-functie

- Voorbeeld: lichtschakeling relais met normaal-gesloten contact**
  - De lamp brandt slechts ( $L=1$ ) als schakelaar A open is ( $A=0$ ), want dan is het NG-contact dicht.

A	L
0	1
1	0

$\bar{A}$

– Notatie :  $L = \bar{A}$

– Symbol :  $A \xrightarrow{1} \boxed{1} \xrightarrow{2} Z$  (IEC-symbool)       $A \xrightarrow{1} \triangle \xrightarrow{2} Z$  (Amerikaans symbool)

Booleaanse algebra DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### AND-functie

- Voorbeeld: lichtschakeling met twee schakelaars in serie**
  - De lamp brandt slechts ( $L=1$ ) als schakelaar A dicht is ( $A=1$ ) én als schakelaar B dicht is ( $B=1$ )

A	B	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A.B

– Notatie :  $L = A.B$

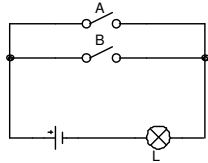
– Symbol :  $A \xrightarrow{1} \boxed{\&} \xrightarrow{3} Z$  (IEC-symbool)       $A \xrightarrow{1} \text{D} \xrightarrow{3} Z$  (Amerikaans symbool)

Booleaanse algebra DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

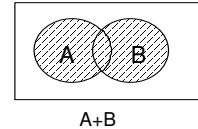
## OR-functie

### • Voorbeeld: lichtscheming met twee schakelaars in parallel

- De lamp brandt ( $L=1$ ) als schakelaar A dicht is ( $A=1$ ) of als schakelaar B dicht is ( $B=1$ ) of als beide dicht zijn

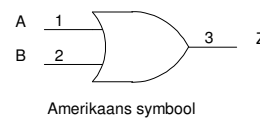
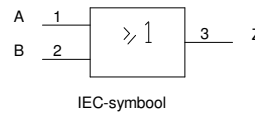


A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



- Notatie :  $L = A+B$  (lees: L is A of B)

- Symbol



Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## Praktische probleemomschrijving

### Opgave :

Een schip vervoert bananen.

Opdat ze niet te snel zouden rijpen, moet je ze koel en donker bewaren.

Ontwerp een schakeling die alarm slaat als licht of warmte het fruit bedreigen.

Bij het laden en lossen moet je het alarm kunnen afzetten.

### Ingangen :

1. Temperatuursensor :  $T = '1'$  als de omgevingst<sup>o</sup> > t<sub>referentie</sub>

2. Lichtsensor :  $L = '1'$  als er meer licht (dan de referentie) op de sensor valt

3. Schuifschakelaar :  $S = '1'$  als het alarm moet werken, '0' als uitgeschakeld

### Uitgang :

Alarmtoeter A werkt bij een logische '1'

### Oplossing :

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## Booleaanse variabelen

- **Wat zijn Booleaanse variabelen?**
  - Elementen uit de 2-waarden logica (binaire grootheden)
- **Bewerkingen met Booleaanse variabelen**
  - Complementering
    - » voorstelling:  $\bar{a}$
    - » hardware equivalent: INVERTER
  - Doorsnede
    - » voorstelling:  $a.b$  of  $ab$
    - » hardware equivalent: AND poort
  - Unie
    - » voorstelling:  $a + b$
    - » hardware equivalent: OR poort

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## Wetten

- **Commutatieve wetten**
  - $a+b = b+a$
  - $a.b = b.a$
- **Associatieve wetten**
  - $(a+b)+c = a+(b+c) = a + b + c$
  - $(a.b).c = a.(b.c) = a.b.c$
- **Distributiviteitsregels**
  - $a.(b+c) = a.b + a.c$
  - $a + b.c = (a+b).(a+c) !!!$

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### Wetten

- **Bewerking met zichzelf**

- $a + a = a$

- $a \cdot a = a$

- **Bewerking van een variabele met zijn inverse**

- $a \cdot \bar{a} = 0$

- $a + \bar{a} = 1$

- **Bewerkingen met constanten**

- $a + 0 = a$

- $a + 1 = 1$

- $a \cdot 1 = a$

- $a \cdot 0 = 0$

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### Afgeleide regels

- **Absorptie met zichzelf**

- $a + a \cdot b = a$

- $a \cdot (a + b) = a$

- **Dubbele inversie**

- $\bar{\bar{a}} = a$

- **Absorptie met complement**

- $a + \bar{a} \cdot b = a + b$

- $a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### Wetten van DE MORGAN

- Van NOR naar AND

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

- Van NAND naar OR

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### Afgeleide logische functies

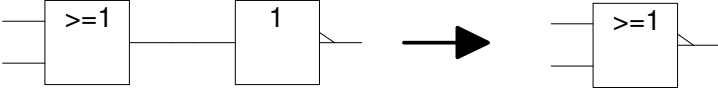
- Slechts drie basisfuncties:
  - NOT
  - AND
  - OR
- Met deze drie basisfuncties kunnen alle digitale schakelingen opgebouwd worden
- Door samenvoegen van basisfuncties ontstaan afgeleide logische functies:
  - AND gevolgd door NOT = NAND
  - OR gevolgd door NOT = NOR
  - ...

Booleaanse algebra

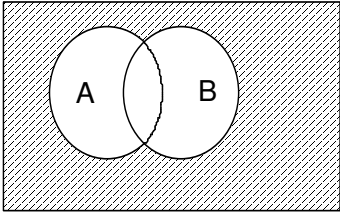
DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### NOR-functie

- NOR = OR gevolgd door NOT



A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

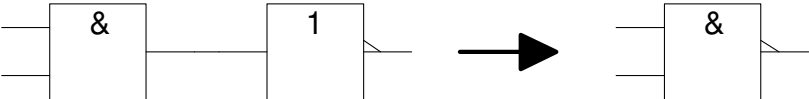


$\overline{A+B}$

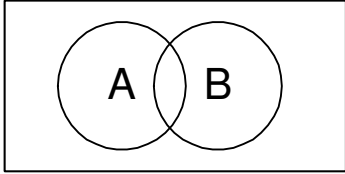
Booleaanse algebraDIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### NAND-functie

- NAND = AND gevolgd door NOT



A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

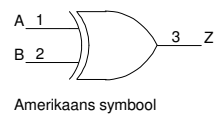
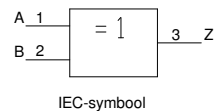


?

Booleaanse algebraDIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## EXOR-functie

- Bij een EXOR is de uitgang 1 als een *oneven* aantal ingangen 1 is
- Voor 2 ingangen: als net één ingang 1 is



A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

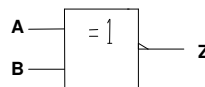
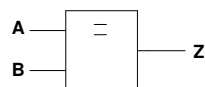
$$Z = A \oplus B = \bar{A}.B + A.\bar{B}$$

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## EXNOR-functie

- EXNOR = inverse van EXOR
- Bij een EXNOR is de uitgang 0 als een *oneven* aantal ingangen 1 is
- Voor 2 ingangen: 1 als beide ingangen gelijk zijn
- Andere naam: comparator



A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Z = \overline{A \oplus B} = \bar{A}.B + A.B$$

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### Functies met drie variabelen

A	B	C	A.B.C	$\overline{A.B.C}$	A+B+C	$\overline{A+B+C}$	$A\oplus B\oplus C$	$\overline{A\oplus B\oplus C}$
0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1	0

Opgelet: EXOR met 3 ingangen = 'oneven' poort  
EXNOR met 3 ingangen = 'even' poort

ONEVEN

EVEN

Booleaanse algebraDIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

### SOP en POS

- **Sum Of Products (SOP) : som van producten**
  - Een som van allemaal producttermen
  - Hardware equivalent realiseerbaar in 3 stappen
    - » INV
    - » AND
    - » OR
- **Product Of Sums (POS): product van sommen**
  - Een product van allemaal somtermen
  - Hardware equivalent realiseerbaar in 3 stappen
    - » INV
    - » OR
    - » AND
- **SOP wordt meest gebruikt**

Booleaanse algebraDIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## Mintermen

- Indien een functie  $n$  ingangen heeft, zijn er  $2^n$  mintermen.
- Mintermen worden genummerd volgens de plaats in de waarheidstabel

	A	B	C	Minterm	f
0	0	0	0	$m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	0
1	0	0	1	$m_1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$	0
2	0	1	0	$m_2 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$	1
3	0	1	1	$m_3 = \overline{A} \cdot B \cdot C$	0
4	1	0	0	$m_4 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	1
5	1	0	1	$m_5 = A \cdot \overline{B} \cdot C$	0
6	1	1	0	$m_6 = A \cdot B \cdot \overline{C}$	1
7	1	1	1	$m_7 = A \cdot B \cdot C$	0

- **Functie afleiden uit WHT:**

som de combinaties op waarvoor de functie 1 moet zijn

$$\begin{aligned} f(A,B,C) &= \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C} \\ &= m_2 + m_4 + m_6 \\ &= \sum m(2,4,6) \end{aligned}$$

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## Standaardsom van producten

- Als elke variabele voorkomt in elke productterm spreekt men van een standardsom
- Elke productterm noemt men een minterm
- Onvolledige normaalvormen kunnen volledig gemaakt worden

$$\begin{aligned} f(A,B,C) &= \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} \\ &= (A + \overline{A}) \cdot \overline{B} \cdot C + (B + \overline{B}) \cdot A \cdot \overline{C} + (A + \overline{A}) \cdot B \cdot \overline{C} \\ &= A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \end{aligned}$$

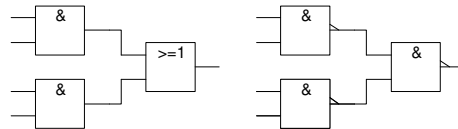
Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## NAND-logica

- Elke functie kan opgeschreven worden als een som van producten (SOP)
- Elke functie kan dus opgebouwd worden met AND-poorten (producten) gevolgd door OR-poorten (som)
- Volgens de regels van De Morgan kunnen we overgaan van OR naar NAND
- Bijgevolg kan elke functie opgebouwd worden *door alleen maar NAND-poorten te gebruiken*

$$\begin{aligned} f(A,B,C) &= \overline{\overline{B.C} + A.\overline{C} + B.\overline{C}} \\ &= \overline{\overline{B.C} + A.\overline{C} + B.\overline{C}} \\ &= \overline{\overline{B.C} . A.\overline{C} . B.\overline{C}} \end{aligned}$$



Booleaanse algebra

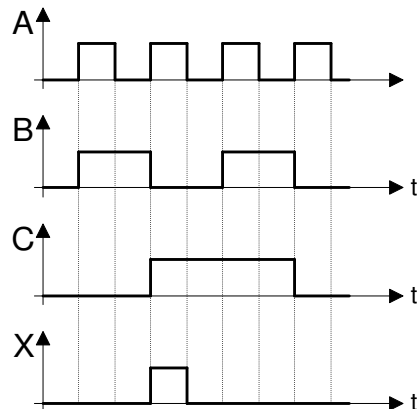
DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## OEFENING 3

**Oefening 3** : Gegeven onderstaand tijdvolgordediagram.

Leid hieruit af :

1. de waarheidstabel
2. de logische vergelijking



Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## OEFENING 4

**Oefening 4** : Gegeven volgende opgave.

Men beschikt over een generator die maximaal 14 kW kan leveren. Aan deze generator kan men na elkaar enkele motoren aansluiten. Deze motoren belasten de generator als volgt: motor A = 10 kW; motor B = 2 kW; motor C = 6 kW; motor D = 4 kW.

Ontwerp een besturingsschakeling zodanig dat een signaal L=1 optreedt van zodra de generator met 14 kW of meer wordt belast. Dit signaal moet dan een beveiligingsmechanisme starten dat de overbelasting zal opheffen.

Stel de waarheidstabel en de logische vergelijking op.

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT

## OEFENING 6

**Oefening 6** : Zoek de logische formules uitgaande van volgende omschrijving.

We stellen de 12 maanden van het jaar voor met een 4-bits code, die overeenstemt met hun decimale volgnummer: januari =  $0001_2=1_{10}$ , ..., december =  $1100_2=12_{10}$ . Stel een waarheidstabel op die aangeeft welke maand 31 dagen heeft (M31), welke 30 dagen (M30) en welke 28 (M28). Leid hieruit de logische formules af.

Maand	D	C	B	A	M31	M30	M28
	0	0	0	0			
Januari	0	0	0	1			
Februari	0	0	1	0			
Maart	0	0	1	1			
April	0	1	0	0			
Mei	0	1	0	1			
Juni	0	1	1	0			
Juli	0	1	1	1			
Augustus	1	0	0	0			
September	1	0	0	1			
Oktober	1	0	1	0			
November	1	0	1	1			
December	1	1	0	0			
	1	1	0	1			
	1	1	1	0			
	1	1	1	1			

Booleaanse algebra

DIGITALE ELEKTRONICA 1PBa-ELO/ICT